

Cours 7 : Exponentielle d'une matrice

Etant donné une matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, considérons la somme (partielle)

$$S_m = \sum_{k=0}^m \frac{B^k}{k!}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Clairément, $S_m \in \mathbb{C}^{n \times n}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

De plus, on a

$$|S_m| \leq \sum_{k=0}^m \frac{|B|^k}{k!} \leq e^{|B|} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Ainsi, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ converge normalement.

Définition 7.1 : On appelle exponentielle de la matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice e^B définie par

$$(7.1) \quad e^B \equiv \exp(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

On déduit immédiatement des considérations ci-dessus que

$$(7.2) \quad |e^B| \leq e^{|B|}.$$

Lemme 7.1 : Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $\varphi_A(t) := e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$.

Alors $\varphi_A \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$ et on a

$$(7.3) \quad \varphi_A'(t) = \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Preuve: (a) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $\rho = \max \{ |t| ; t \in I \}$. Alors, pour tout $t \in I$,

$$\left| \frac{(tA)^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^k |A|^k}{k!} \leq \frac{\rho^k |A|^k}{k!}.$$

Puis que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k |A|^k}{k!} = e^{\rho |A|} < \infty$, on déduit par

la théorie des séries entières que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ converge normalement uniformément vers e^{tA} sur I .

Ainsi, la suite de fonctions

$$S_m(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(tA)^k}{k!}$$

converge uniformément vers φ_A sur I . Comme $t \mapsto S_m(t)$ est continue pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on conclut que φ_A est continue sur I . Comme I est arbitraire, on a montré $\varphi_A \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, S_m est dérivable sur $\mathbb{R}$

avec

$$S_m'(t) = \sum_{k=1}^m \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{k^j A^j A}{j!} = A S_{m-1}(t).$$

Ainsi, la suite (S_m') converge uniformément sur

I vers la fonction $t \mapsto A e^{tA}$. De plus,
pour tout $t, t_0 \in I$,

$$S_m(t) - S_m(t_0) = \int_{t_0}^t S_m'(s) ds.$$

En passant à la limite $m \rightarrow \infty$ et en utilisant
la convergence uniforme, il vient

$$\varphi_A(t) = \varphi_A(t_0) + \int_{t_0}^t A \varphi_A(s) ds.$$

On conclut que φ_A est dérivable sur I et
vérifie (7.3) (car $I \subset \mathbb{R}$ est qcq). Le fait que
 $\varphi_A \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$ découle de (7.3) par récurrence. $\#$

Corollaire 7.1 : Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $X(t)$ la matrice principale en $t = t_0$ de

$$(H-c) \quad x' = Ax.$$

Alors $X(t) = e^{(t-t_0)A}$, $t \in \mathbb{R}$.

Preuve: Soit $Y(t) = e^{(t-t_0)A}$, $t \in \mathbb{R}$. Posant $s = t - t_0$, le lemme 7.1 donne

$$Y' = \frac{dY}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} e^{sA} = A e^{sA} = A e^{(t-t_0)A} = AY.$$

De plus, Y satisfait $Y(t_0) = I$. Par unicité de la matrice principale, on conclut que $Y = X$. #

On déduit du corollaire 7.1 que la solution générale de $(H-c)$ est donnée par $x(t) = e^{tA}c$, où $c \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur constant. Malheureusement cette solution est donc donnée sous la forme d'une série infinie, ce qui permet difficilement d'étudier les propriétés de la solution, par exemple son comportement asymptotique, lorsque $t \rightarrow \pm \infty$.

Nous allons maintenant voir comment simplifier l'écriture de la solution, selon la structure de A .

Commençons par quelques propriétés générales des exponentielles de matrice.

Proposition 7.1 : Soit $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

(a) Si $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $BC = CB$, alors

$$Be^C = e^C B \quad \text{et} \quad e^{B+C} = e^B e^C = e^C e^B.$$

(b) $\det e^B \neq 0$ et $(e^B)^{-1} = e^{-B}$.

(c) Si $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, alors $\det e^B > 0$.

(d) Si $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est inversible, alors

$$T^{-1} e^B T = e^{T^{-1} B T}.$$

(e) Si $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, alors $e^B = \begin{pmatrix} e^{B_1} & 0 \\ 0 & e^{B_2} \end{pmatrix}$.

(f)

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}, \text{ alors } e^{tB} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t \frac{t^2}{2!} \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve:

$$\begin{aligned} (a) \quad B e^C &= B \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{C^k}{k!} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{B C^k}{k!} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{C^k B}{k!} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{C^k}{k!} B = e^C B. \end{aligned}$$

$$\text{Soit } X(t) = \exp(t(B+C)), \quad Y(t) = \exp(tB) \exp(tC).$$

On a :

- $X'(t) = (B+C) X(t)$, $X(0) = I$
- $$\begin{aligned} Y'(t) &= (e^{tB})' e^{tC} + e^{tB} (e^{tC})' \\ &= B e^{tB} e^{tC} + e^{tB} C e^{tC} \\ &= (B+C) e^{tB} e^{tC} = (B+C) Y(t) , \quad Y(0) = I . \end{aligned}$$

Par unicité pour le pb. de Cauchy, on conclut que $X(t) = Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$X(1) = Y(1) , \quad \text{i.e.} \quad e^{B+C} = e^B e^C .$$

(b) $I = \exp(0) = \exp(B-B) = \exp(B) \exp(-B)$,
 d'où $\exp(B)^{-1} = \exp(-B)$.

(c) Si B est réelle, alors $\det \exp(tB) \in \mathbb{R} \ \forall t \in \mathbb{R}$.
 On a en particulier $\det \exp(0) = 1 > 0$. Comme
 $\det \exp(tB) \neq 0$, il découle du théorème de la
 valeur intermédiaire que $\det \exp(tB) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.
 En particulier $\det \exp(B) > 0$.

(d)-(e) se prouvent par calculs directs.

(f) On écrit

$$B = 2I + H, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$e^{tB} = e^{t(2I+H)} = e^{t2I} e^{tH} = e^{2t} I e^{tH} = e^{2t} e^{tH}.$$

Maintenant,

$$(tH)^2 = \begin{pmatrix} 0 & t & & 0 \\ & 0 & t & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t & & 0 \\ & 0 & t & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 & 0 \\ & 0 & \ddots & t^2 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$
$$(tH)^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t^{n-1} \\ & 0 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (tH)^n = 0.$$

On conclut que tH est une matrice nilpotente
et que

$$\sum_{k=0}^m \frac{(tH)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(tH)^k}{k!} \quad \forall m \geq n-1.$$

Finalement,

$$e^{tH} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{(tH)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & t \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \end{pmatrix}. \quad \#$$

Calcul de e^{tA} : On commence par les cas particuliers suivants.

1. Matrice diagonale : Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & \ddots & a_n \end{pmatrix}$, alors

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{ta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ta_n} \end{pmatrix}.$$

2. Matrice en forme canonique de Jordan :

Une matrice $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est dite en forme

canonique de Jordan si elle s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & 0 \\ & J_1 & \\ 0 & \cdots & J_l \end{pmatrix},$$

où les matrices J_k ($k=0,1,\dots,l$) appelées blocs de Jordan, sont des matrices carrées de la forme

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix} \text{ "bloc diagonal" ; } J_k = \begin{pmatrix} \lambda_{r+k} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \lambda_{r+k} \end{pmatrix} \quad k=1,\dots,l.$$

Ici, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont valeurs propres de J .

Pour $k=1,\dots,l$, λ_{r+k} est valeur propre de J_k et de J .

Grâce à la proposition 7.1,

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & e^{t\lambda_l} \end{pmatrix}, \quad e^{tJ_k} = e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \\ & 1 & t & \ddots & \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad k=1, \dots, l.$$

Exemple 7.1: Considérons l'équation

$$(7.4) \quad x' = Ax, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice principale en $t_0 = 0$ est

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La solution générale est

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \\ c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} \\ c_4 e^{-t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Le cas général découle du théorème d'algèbre linéaire suivant.

Théorème 7.1: Toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est semblable à une matrice en forme canonique de Jordan, i.e. il existe $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible t.q. $J = T^{-1} A T$ est en forme canonique de Jordan.

De plus, $\mathcal{Y}$ est unique, à l'ordre des blocs près.

En appliquant le Théorème 7-1, on peut calculer e^{tA} pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$e^{tA} = e^{t(T\mathcal{Y}T^{-1})} = e^{(Tt\mathcal{Y}T^{-1})} = T e^{t\mathcal{Y}} T^{-1},$$

où $e^{t\mathcal{Y}}$ se calcule comme au cas 2 ci-dessus.

Néanmoins, dans la pratique, il peut être fastidieux de calculer la matrice T . Pour résoudre (H-c), on peut souvent s'en sortir sans le calcul explicite de e^{tA} . En effet, on a le corollaire (non-trivial) suivant.

Corollaire 7.2: Soit λ_k ($k=1, \dots, r$) les valeurs propres simples de A et λ_{r+k} ($k=1, \dots, l$) les valeurs propres de multiplicités correspondantes $r_k \geq 2$ ($k=1, \dots, l$), avec $r + r_1 + \dots + r_l = n$. Alors toute solution de $(H-c)$ a la forme

$$x(t) = \sum_{k=1}^r C_k e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^l p_k(t) e^{\lambda_{r+k} t},$$

où $C_k \in \mathbb{C}^n$ ($k=1, \dots, r$) sont des vecteurs constants et $p_k(t)$ ($k=1, \dots, l$) sont des fonctions polynômiales de t , de degrés respectifs $\leq r_k - 1$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

Rem: Si $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, C_k, p_k peuvent être choisis réels (cf. Exemple 6.3(a)).

Exemple 7.2: Considérons le système

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_2 - x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}, \quad \text{i.e.}$$

$$x' = Ax, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres de A :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3.$$

Cherchons les espaces propres associés :

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = x \\ 3y - z = y \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = z \\ 2x = -z \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ droite de vect. directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
associé à $\lambda_1 = 1$

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 3x \\ 3y - z = 3y \\ z = 3z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y = z = 0 \hookrightarrow$ droite de vect. directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
associée à $\lambda_2 = 3$

(On voit ici que la multiplicité géométrique de λ_2 n'est pas égale à sa multiplicité algébrique.)

On a donc les deux solutions lin. indep.

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vu la structure de l'exponentielle d'un bloc de Jordan (dont la taille correspond à la multiplicité algébrique de la valeur propre correspondante), on sait qu'une autre solution lin. indep. $x_3(t)$ aura la forme

$$x_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

avec $p_i(t)$ un polynôme de degré maximum 1, à savoir la multiplicité algébrique de $\lambda_2 - 1$.

On cherche donc des constantes a_i, b_i ($i=1, 2, 3$)

t-q.

$$X_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix}$$

soit solution. On a

$$X_3'(t) = 3e^{3t} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 3a_1 t + (a_1 + 3b_1) \\ 3a_2 t + (a_2 + 3b_2) \\ 3a_3 t + (a_3 + 3b_3) \end{pmatrix}$$

et $X_3' = A X_3$ donne

$$\begin{pmatrix} 3a_1 t + (a_1 + 3b_1) \\ 3a_2 t + (a_2 + 3b_2) \\ 3a_3 t + (a_3 + 3b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 t + (a_1 + 3b_1) = 3(a_1 t + b_1) + 2(a_2 t + b_2) \\ 3a_2 t + (a_2 + 3b_2) = 3(a_2 t + b_2) - (a_3 t + b_3) \\ 3a_3 t + (a_3 + 3b_3) = a_3 t + b_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0, & a_1 - 2b_2 = 0 \\ a_3 = 0, & a_2 + b_3 = 0 \\ a_3 = 0, & a_3 + 2b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_3 = b_3 = 0 \\ a_1 = 2b_2 \end{cases}.$$

Une solution (non-triviale) est donnée par

$$a_1 = 2, \quad b_2 = 1, \quad \text{tous les autres coeff.} = 0$$

$$\hookrightarrow x_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

CHECK: $x_3'(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 6t+2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ax_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 6t+2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$